Für weiterführende Theorie und mehr Beispiele konsultiert das Skript von Gioele Zardini, die jeweiligen Seitennummern sind unten vermerkt. Diese erste Theorie wird sich jedoch noch sehr nahe an das Skript halten.

Theorie Woche 1:

- **Lineare Gleichungssysteme (LGS):** Skript S. 6
  - **Explizite Form:**

$$\boxed{\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_n \end{array}}$$

⚠ i.A. $m \neq n$, darauf werden wir immer wieder zurückkommen.

Beispiel 1.1:
$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 &= 5 \\ x_1 - 4x_2 &= 0 \end{aligned}$$

  - **Matrixschreibweise:** Es gilt $\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{b}$, wobei

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \ddots & & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Beispiel 1.2: (obiges Beispiel nochmals)

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

⚠ Dies sind blosse Darstellungsarten, also völlig äquivalent!
In der linearen Algebra sind wir jedoch vorwiegend an der Matrixschreibweise interessiert.

- Obere Dreiecksform / Zeilenstufenform (ZSF): —

Ein LGS hat ZSF, falls es folgendermassen aussieht:

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ 0 \quad + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ 0 + 0 + a_{33}x_3 + \dots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ 0 + 0 + \dots + 0 + a_{mn}x_n = b_n \end{array}$$

Der grosse Vorteil an dieser Form ist, dass man aus ihr sehr einfach durch Rückwärtseinsetzen auf die Variablen $x_n, x_{n-1}, \dots, x_1$ schliessen kann.

⚠ Wie der Name schon andeutet muss das Dreieck nicht so schön ausgefüllt sein wie oben.

Beispiel 1.3:

$$\begin{array}{l} 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 7x_4 = 3 \\ 0 + 0 + 4x_3 + 0 = 2 \\ 0 + 0 + 0 + x_4 = 1 \end{array}$$

Dieses LGS ist ebenfalls in ZSF.

In Matrixdarstellung nennt man dies auch die Dreiecksgestalt:

Beispiel 1.4:

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- **Gaussverfahren:** Skript S. 7

Eines der üblichsten Lösungsverfahren für LGS.

- Ziel: LGS auf ZSF bringen und anschliessend durch Rückwärtseinsetzen lösen.

- Erlaubte Operationen:
  - Vertauschen von Zeilen oder Spalten
  - Vielfaches einer Zeile / Spalte zu einer anderen Zeile / Spalte addieren.

- Mögliche Lösungen:
  - Eindeutige Lösung
  - Unendlich viele Lösungen
  - Keine Lösung

Beispiel 1.5: (eindeutige Lösung)

$$\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + 2x_3 &=& 4 \\ 2x_1 + x_3 &=& 0 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 &=& 2 \end{array}$$

Lösung $\Rightarrow$ $\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, $\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$, $\underline{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

Wir schreiben:

$$\begin{array}{l|ccc|c} (\mathrm{I}) & 1 & 1 & 2 & 4 \\ (\mathrm{II}) & 2 & 0 & 1 & 0 \\ (\mathrm{III}) & 1 & 1 & 3 & 2 \end{array}$$

⚠ Wir lassen $\underline{x}$ weg und "merken" uns vorerst einmal, dass jede Spalte mit einer Variabel korrespondiert!

$$\xrightarrow[\text{III}-1\cdot\text{I}]{\text{II}-2\cdot\text{I}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & -3 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

⚠ Die Operationen werden beidseitig angewendet!

$\Rightarrow$ Kein weiterer Schritt notwendig!

Wir erhalten nun eigentlich folgendes LGS:

$$x_1 + x_2 + 2x_3 = 4$$
$$0 - 2x_2 - 3x_3 = -8$$
$$0 + 0 + x_3 = -2$$

Nun ist auch klar, was mit Rückwärtseinsetzen gemeint ist $\leadsto$ wir finden sehr leicht:

$$\underline{\underline{x_3 = -2}}, \quad \underline{\underline{x_2 = 7}}, \quad \underline{\underline{x_1 = 1}}$$

Nachfolgend ein Beispiel mit unendlich vielen Lösungen, wo wir sehen, wie man typischerweise <u>Lösungsmengen</u> von LGS oder ganz generell darstellt.

Beispiel 1.6: $\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{b}$ $\quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 4 \\ 2 & 6 & 6 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 4 & 1 \\ 2 & 6 & 6 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{III}-2\text{I}]{\text{II}-2\text{I}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{III}-2\text{II}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

⚠ Wir haben die Bedingung $0 \cdot x_3 = 0$, was nun? Das ist ja <u>immer</u> erfüllt $\Rightarrow$ Wir führen einen Parameter für x_3 ein $\leadsto$ $x_3 = t$, $t \in \mathbb{R}$ (beliebig!)

$\Rightarrow x_3 = t \quad , \quad x_2 = 1-2t \quad , \quad x_1 = 3t-2$

$$\Rightarrow L = \left\{ \begin{bmatrix} 3t-2 \\ 1-2t \\ t \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\}$$

∘ **Eigenschaften des Gaussverfahrens:** Teils Skript S. 8 ff.

- Der erste nichtverschwindende Term einer Zeile der in ZSF gebrachten Matrix heisst **Pivot-Element:**

  Beispiel 1.7:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & 3 & 7 \\ 0 & \boxed{4} & 5 & 8 \\ 0 & 0 & \boxed{6} & 9 \end{array}\right]$$

  Bemerkung: Dieses Element wird als Bezug für das Gaussverfahren genommen. Wählt man 1 als Pivot, so werden die Berechnungen immer einfacher!

- Eine "über" einem Pivot stehende Variable x_k heisst <u>Pivot-Variable</u>, alle übrigen nennt man <u>freie Variablen</u> oder aber <u>freie Parameter</u>.

- Ein LGS mit $\underline{b} = 0$ bezeichnet man als <u>homogenes lineares Gleichungssystem</u> (HLGS).

- Die Anzahl der Zeilen/Spalten, welche ungleich 0 sind in der ZSF nennt man <u>Rang</u> (r).

Der Rang entspricht auch gleich der Anz. linear unabhängiger Zeilen/Spalten der Matrix (später mehr).

⚠ Der Rang ist für Matrizen, nicht für LGS definiert!

Beispiel 1.8:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}, \quad \text{Rang}(A) = r = \underline{\underline{3}}$$

$$\underline{\underline{B}} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{Rang}(B) = r = \underline{\underline{2}}$$

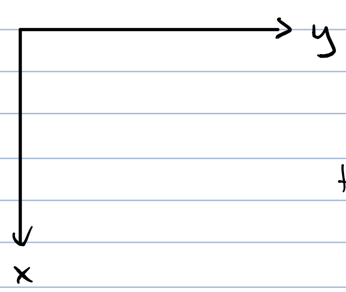
- Die <u>Dimensionen</u> einer Matrix bezeichnet man üblicherweise folgendermassen: $A^{m \times n}$ bedeutet, dass A

  - m Zeilen
  - n Spalten

besitzt.

Beispiel 1.9: $A^{5\times 2} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix}$, $A^{1\times 7} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$

Tipp: Das "Koordinatensystem" einer Matrix ist ein um 90° heruntergeklapptes kartesisches Koord. Sys.:



$\longrightarrow$ typischerweise

$$\begin{array}{c c} & \xrightarrow{\;j\;} \\ \downarrow i & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \ddots & & \vdots \\ a_{31} & & \boxed{a_{ij}} & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \end{array}$$

- Für $A^{m \times n}$ gilt <u>immer</u> $0 \leq r \leq m$ (sowie $0 \leq r \leq n$),
falls $m = n$ (quadratische Matrix):
  - r = Anz. Pivot-Variablen
  - $n - r$ = Anz. freier Variablen

- Falls $r < m$ (Beispiel 1.6) erhält man, aufgrund der auftretenden Nullzeilen, sogenannte <u>Verträglichkeits- oder Kompatibilitätsbedingungen:</u> (*)

$$\left(\begin{array}{ccccc|c}
* & * & * & \cdots & * & b_1 \\
0 & * & * & \cdots & * & \vdots \\
0 & 0 & * & \ddots & \vdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & & * & b_r \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{r+1} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_m
\end{array}\right) \left.\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right\} (*)$$

  - falls $b_{r+1} = \ldots = b_m = 0$, dann sagt man, dass die (*) erfüllt sind. Man sagt dann, dass das LGS **konsistent**, also lösbar, ist.

  - falls irgendein $b_{r+1}, \ldots, b_m \neq 0$, dann sind die (*) nicht erfüllt und das LGS nicht lösbar.

Beispiel 1.10: $\underline{A}\,\underline{x} = \underline{b}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}
1 & 2 & 3 & 7 \\
0 & 4 & 5 & 8 \\
0 & 0 & 0 & 9
\end{array}\right)$$

Die Bedingung $0 \cdot x_3 = 9$ ist logisch nicht erfüllbar!

$\Rightarrow$ keine Lösung $\Rightarrow$ $\underline{\underline{L = \{\emptyset\}}}$ (leere Menge)

- Ein LGS hat <u>mindestens eine Lösung</u> genau dann, wenn (g.d.w.) entweder:
  - $r = m$
  - $r < m$ und alle Verträglichkeitsbedingungen sind erfüllt (falls $m = n$ folgt ausserdem, dass das LGS dann $m - r$ frei Parameter besitzt)

⚠ Dies ist die Voraussetzung für folgende Unterscheidung.

- Ein LGS hat <u>genau eine eindeutige</u> Lösung falls $r = n =$ # Spalten

- Ein LGS hat <u>unendlich viele</u> Lösungen mit $n - r$ freien Parametern, falls $r < n$

- Ein HLGS ist immer konsistent und besitzt immer die <u>triviale Lösung</u>

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Ein HLGS besitzt auch nichttriviale Lösungen für $r < n$

- Sei $m = n$, ein LGS $\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{b}$ ist genau dann für beliebige b lösbar, wenn das zugehörige HLGS $\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = 0$ <u>nur</u> die triviale Lösung besitzt.

o Matrizen: Skript S. 17 ff.

Eine vollständige Zusammenstellung der Definition und Eigenschaften aller Matrizentypen findet sich im zweiten bereitgestellten Dokument diese Woche. Dort befinden sich auch die Rechenregeln.

(Konkret umfasst das Dokument die Transponierte, die Inverse sowie Orthogonale und Symmetrische Matrizen sowie all deren Eigenschaften & Rechenregeln)

o Rechnen mit Matrizen: Skript S. 18 f

- Addition ($A^{m \times n} + B^{m \times n} = C^{m \times n}$):

Man addiert Elementweise:

⚠ Alle Matrizen müssen dieselbe Dimension haben!

Beispiel 1.11:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 4 & 8 \\ 2 & 6 & 10 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 1 & 7 & 13 \\ 4 & 10 & 16 \end{bmatrix}}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \text{NICHT DEFINIERT!}$$

- Skalarmultiplikation ($\alpha \cdot A^{m \times n} = C^{m \times n}$):

Man multipliziert mit allen Elementen:

Beispiel 1.12:

$$2 \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$$

· **Matrixmultiplikation**: ($A^{m\times n} \cdot B^{n\times p} = C^{m\times p}$)

Wir bilden das "Skalarprodukt" (definieren wir etwas später genauer) der Zeilenvektoren von A und der Spaltenvektoren von B. Das Ergebnis schreiben wir in die mit A korrespondierende Zeile und mit B korrespondierende Spalte.

Beispiel 1.13:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\cdot 2 + 4\cdot 0 & 3\cdot 3 + 4\cdot 1 \\ 1\cdot 2 + 2\cdot 0 & 1\cdot 3 + 2\cdot 1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 6 & 13 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}}}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{3} \overset{?}{\cdot} 2\left\{\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}\right. = \text{NICHT DEFINIERT}$$

⚠ Klassisches Matrix-Vektorprodukt:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cdot 1 + 3\cdot 2 \\ 4\cdot 1 + 5\cdot 2 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 8 \\ 14 \end{bmatrix}}}$$

⚠ $$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \text{NICHT DEFINIERT!}$$

Das "klassische" Skalarprodukt aus der Schule ist korrekterweise:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = 3 + 2\cdot 4 = 11 \iff \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}^{T} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

∘ **Die LR-Zerlegung ($P \cdot A = L \cdot R$):** Skript S. 24

↳ Eine Alternative zur Berechnung der Lösungen eines LGS, nützlich falls man $\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{b}$ für mehrere $\underline{b}$ lösen muss/möchte.

Kochrezept:

Es sei $\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{b}$ gegeben.

(i) Man schreibt zwei Einheitsmatrizen und A nebeneinander: $[I_n], [I_n], [A]$, wobei diese Matrizen mit P, L, R korrespondieren werden!

(ii) Man wendet auf A das Gaussverfahren wie bekannt an, bis man die ZSF erreicht hat,

ABER:

- Man wählt die Koeffizienten, mit welchen die Pivotzeilen multipliziert werden müssen immer bezüglich der Subtraktion
  ⇝ z.B. $II + 2 \cdot I \Rightarrow II - (-2) I$ schreiben.
- Falls man Zeilen- oder Spaltenvertauschungen durchführen muss, macht man sie mit dem 1. I_n mit.

(iii) - Die in ZSF gebrachte Matrix A ist bereits R!
- Die in (ii) benützten Koeffizienten trägt man an jeweiliger Stelle in die 2. Einheitsmatrix ein und erhält so schlussendlich L.
- Die (vertauschte) 1. Einheitsmatrix ist die <u>Permutationsmatrix</u> P

(iv) Man löst:
- Zuerst $\underline{\underline{L}}\,\underline{c} = \underline{\underline{P}}\,\underline{b}$ mit Vorwärtseinsetzen und findet so $\underline{c}$.
- Anschliessend $\underline{\underline{R}}\,\underline{x} = \underline{c}$ mit Rückwärtseinsetzen und findet somit unsere Lösungsmenge $\underline{x}$.

Bemerkung: Die 2. Einheitsmatrix kann man auch erst am Ende aufbauen, oder aber ganz weglassen und L <u>in</u> R aufbauen, mehr dazu in der Übungsstunde, sonst fragen.

Beispiel 1.14:
Finde $\underline{\underline{L}}, \underline{\underline{R}}, \underline{\underline{P}}$ so, dass $\underline{\underline{L}}\,\underline{\underline{R}} = \underline{\underline{P}}\,\underline{\underline{B}}$ gilt und löse anschliessend $\underline{\underline{B}}\,\underline{x} = \underline{b}$:

$$\underline{\underline{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -3 & 7 & 6 \\ -3 & -2 & -2 \end{bmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -62 \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{P}, \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{L}, \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -3 & 7 & 6 \\ -3 & -2 & -2 \end{bmatrix}}_{R} \xrightarrow{\mathrm{II} \Leftrightarrow \mathrm{I}}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 & 7 & 6 \\ 0 & 1 & -3 \\ -3 & -2 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\mathrm{II} - 0 \cdot \mathrm{I}]{\mathrm{III} - \boxed{(+1)}\,\mathrm{I}}$$

(da 1. Elem. bereits 0)

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \boxed{1} & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 & 7 & 6 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & -9 & -8 \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathrm{III} - (-9) \cdot \mathrm{II}}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{P}, \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -9 & 1 \end{bmatrix}}_{L}, \underbrace{\begin{bmatrix} -3 & 7 & 6 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -35 \end{bmatrix}}_{R}$$

$\Rightarrow$ Lösen jetzt $\underline{\underline{L}} \cdot \underline{c} = \underline{\underline{P}} \cdot \underline{b} \Leftrightarrow \underline{\underline{L}}\,\underline{c} = \underline{b}'$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -62 \end{bmatrix} = \underline{\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -62 \end{bmatrix}} = \underline{b}'$$

Gauss

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & -9 & 1 & -62 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{vorwärtseinsetzen}} \left.\begin{array}{l} c_1 = 0 \\ c_2 = 3 \\ c_3 = -35 \end{array}\right\} \underline{c} = \underline{\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -35 \end{bmatrix}}$$

$\Rightarrow$ Nun $\underline{\underline{R}}\,\underline{x} = \underline{c}$:

$$\text{Gauss} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} -3 & 7 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & -35 & -35 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{rückwärtseinsetzen}} \left.\begin{array}{l} x_3 = 1 \\ x_2 = 6 \\ x_1 = 16 \end{array}\right\} \underline{x} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 16 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}}}$$

Nun kann man die Stärke der LR-Zerlegung erkennen, für ein anderes $\underline{b}$ muss man nur eine Multiplikation mit P vollführen & einmal vorwärts- & einmal rückwärtseinsetzen!

Dies soll als Einstieg in die lineare Algebra Vorlesung gelten und ist deshalb sehr ausführlich, so dass wir alle die gleiche "Sprache" sprechen.

In den folgenden Wochen werde ich mich in der Theorie auf das Nötigste beschränken und vor allem auf Kochrezepte und konkrete Anwendungen/Beispiele eingehen, sowie Ergänzungen oder Korrekturen zum Skript anbringen. Ich werde jedoch immer angeben, wo im Skript man die nötige Theorie selbst nachschlagen kann!